Graphisches Ableiten

Annegret Sonntag

18. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung

Eine Funktion ist eine Rechenvorschrift, die beschreibt, wie aus einem gewählten Wert x ein anderer Wert y berechnet wird. Die einfachsten Funktionen, die behandelt werden, sind Geraden. Die Rechenvorschrift $y = mx + b$ besagt, dass der gewählte x-Wert mit einer Zahl m multipliziert wird und eine weitere Zahl b dazu addiert wird. Wenn man nun verschiedene dieser linearen Funktionen betrachtet, stellt man fest, dass die Zahl **m** bestimmt, wie schnell die y-Werte steigen oder fallen. Deshalb nennt man diese Zahl Steigung. Wenn man nun auch bei komplizierteren Funktionen bestimmen will, was die Steigung ist, stellt man fest, dass die Steigung in jedem Punkt der Kurve verschieden ist. Das heißt wir brauchen für die Steigung auch eine Rechenvorschrift, die uns für jedes x angibt, wie groß die Steigung ist. Diese Rechenvorschrift ist die Ableitung der Funktion. Die Ableitung kann man jetzt wieder als Funktion betrachten, von der wir die Steigung wissen wollen. Die zweite Ableitung gibt uns also die Information über die Steigung der ersten Ableitung usw. Wenn man nun den Graph einer Funktion betrachtet, kann man über bestimmte Werte der Ableitungsfunktion Aussagen machen. Wenn eine Funktion einen Hoch- oder Tiefpunkt hat, muss die Ableitungsfunktion an dieser Stelle den Wert 0 haben, also eine Nullstelle besitzen. Wenn eine Funktion in einem bestimmten Bereich monoton steigt, muss das Vorzeichen der Ableitungsfunktion in diesem Bereich positiv sein. Wendepunkte von f haben die Eigenschaft, dass $f'' = 0$ sein muss. Ist die zweite Ableitung 0, hat die erste Ableitung eine waagrechte Tangente. Hat f einen Wendepunkt, folgt daraus,dass f' einen Extrempunkt hat.

- Dynamisches Arbeitsblatt Graphisches Ableiten

2 Ableitung zeichnen

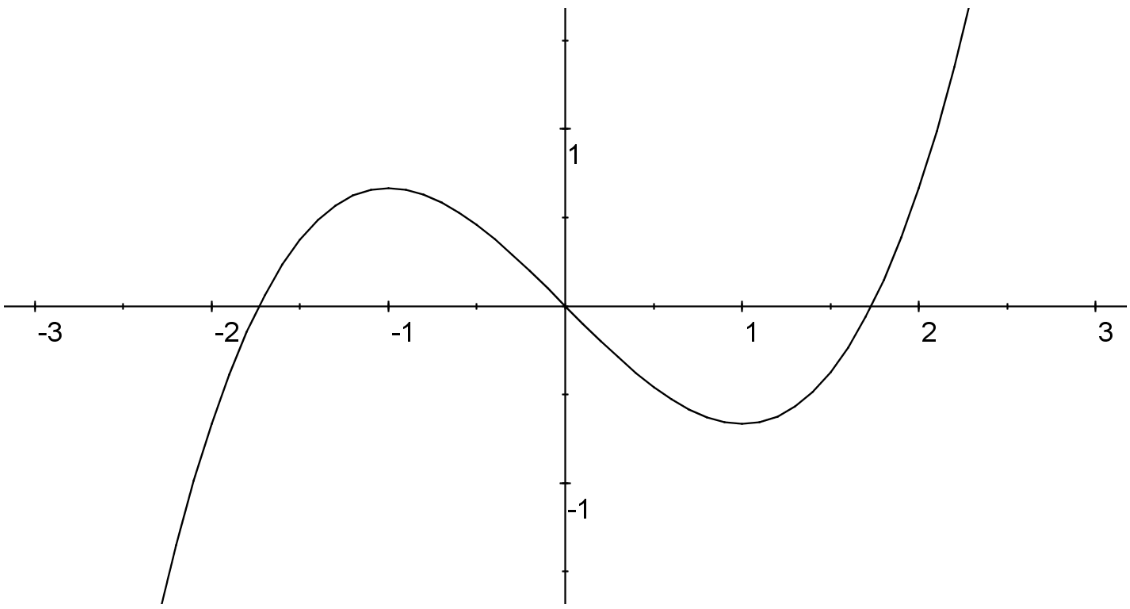

Abbildung 1: Kurve dritten Grades

Gezeichnet werden soll die Ableitung der Funktion. Um Ableitungen graphisch zu bestimmen, ohne dass man die Gleichung der Funktion kennt, werden meistens ganzrationale Funktionen 2.-4- Grades gewählt.

Es ist deshalb hilfreich, gleich zu überlegen, was wohl der Grad der Funktion ist, die man sieht. Kurven, die von $-\infty$ nach $+\infty$ verlaufen oder umgekehrt, müssen einen ungeraden Grad haben. Da die Kurve zwei Extrempunkte hat, muss der Grad mindestens 3 sein. Die Ableitung, die wir suchen, ist also zweiten Grades. Die Extrempunkte von f sind die Nullstellen von f'. Die Funktion hat bei 1 und -1 Extrempunkte also hat f' bei 1 und -1 Nullstellen. Wir betrachten den Verlauf von f zwischen den Extrempunkten und sehen, dass f auf dem ganzen Bereich monoton fällt. Das bedeutet, dass f' in diesem Bereich negativ sein muss. Man sieht, dass f bei 0 einen Wendepunkt hat, also muss die Ableitung bei 0 einen Extrempunkt haben, in diesem Fall kann das ja nur ein Tiefpunkt sein. Der Tiefpunkt muss also auf der y-Achse liegen. Wie findet man jetzt heraus, was für einen y-Wert der Punkt hat? Der Wert, muss gleich der Steigung von f an der Stelle 0 sein. Man kann schätzen, dass die Tangente in (0|0) etwa die Steigung -1 hat. Nun können wir die Kurve skizzieren.

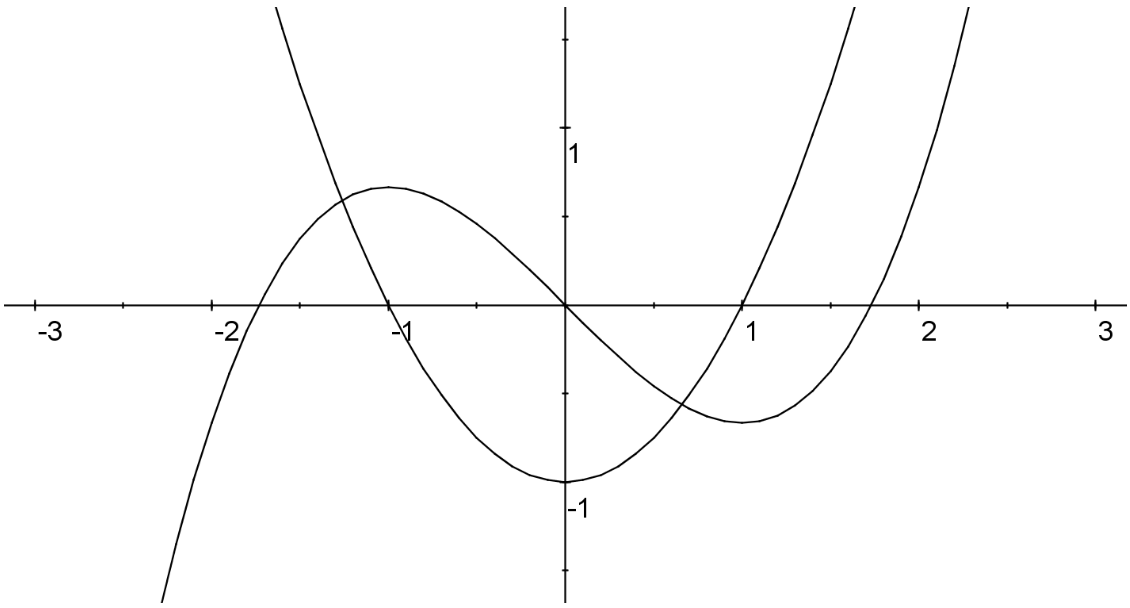

Abbildung 2: Kurve dritten Grades und ihre Ableitung

3 Stammfunktion zeichnen

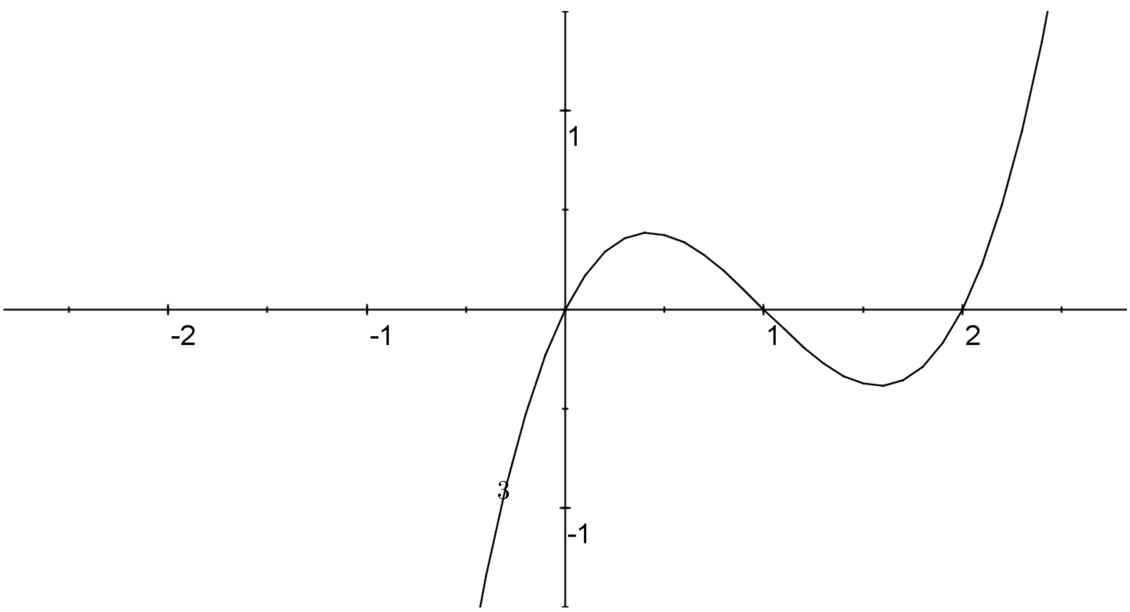

Abbildung 3: Kurve dritten Grades

Nun soll die Kurve die Ableitung f' sein und es soll f gezeichnet werden. Eine solche Funktion nennt man Stammfunktion. Wir gehen jetzt also umgekehrt vor. Zunächst wissen wir, dass die Stammfunktion einer Kurve dritten Grades eine Kurve vierten Grades sein muss. Wenn diese Kurven Extrempunkte besitzen sehen sie aus wie ein M oder ein W. Da f' links der ersten Nullstelle negativ ist, fällt f in diesem Bereich, muss also von oben kommen.Rechts der dritten Nullstelle ist f' positiv und damit steigt f ,geht also wieder nach oben. Unsere gesuchte Kurve muss also W-Form haben. Die Nullstellen von f' sind die Extrempunkte von f. Von links betrachtet fällt f also und hat dann einen Extrempunkt. Das muss demnach ein Tiefpunkt sein. Zwischen 0 und 1 ist f' positiv. f steigt also bis zum nächsten Hochpunkt. Entsprechend fällt f dann wieder bis zum Tiefpunkt und steigt dann nur noch. Allerdings kann man f nur prinzipiell skizzieren, da ein konstanter Wert am Ende der Funktion beim Ableiten wegfällt. Man kann also viele Funktionen zeichnen, die diese Ableitung haben. Eine Möglichkeit wäre also:

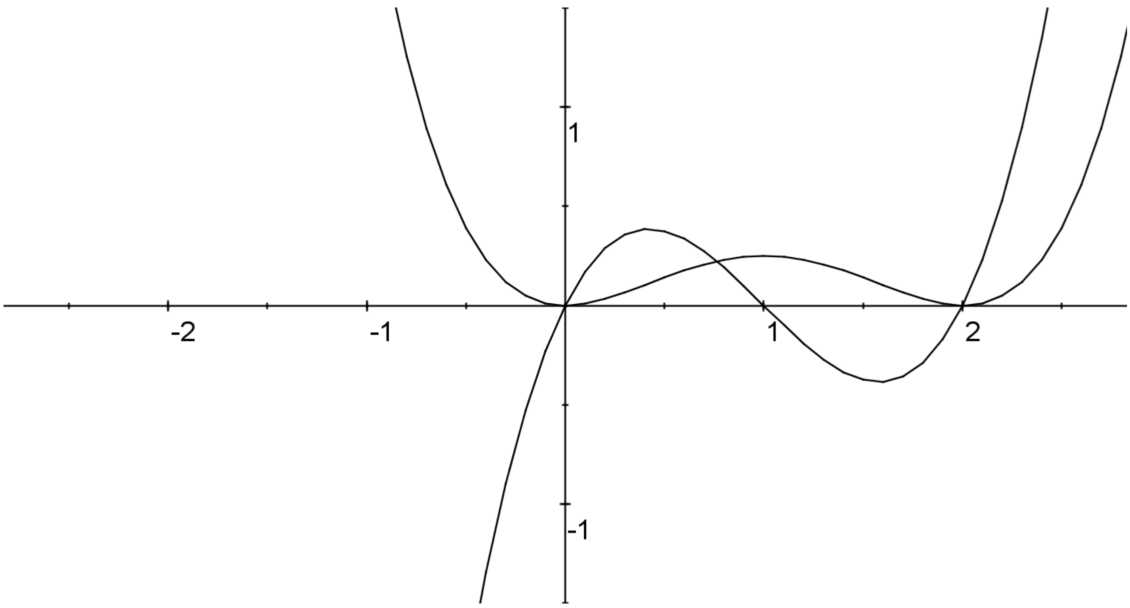

Abbildung 4: Kurve dritten Grades und eine Stammfunktion